Version 13.12.2007 November 2007

MIII – Analysis in mehreren Veränderlichen – WiSe 2007/08

Kurzfassung
Martin Schottenloher

$\infty\infty\infty$

Kapitel XII. Maßtheorie

Worum geht es?

1. Grundlegung einer Integrationstheorie in mehreren Veränderlichen: Das Lebesgueintegral im euklidischen n-dimensionalen Raum.

2. Verbesserung der bisherigen Integrationstheorie in einer Veränderlichen: Zusammenfassung der verschiedenen Ansätze zu einer einheitlichen Theorie mit guten Permanenzsätzen für konvergente Funktionenfolgen.

3. Grundlegung zur Wahrscheinlichkeitstheorie.

Es geht nicht um die Maßtheorie an sich. Die Maßtheorie soll nur kurz als Werkzeug bereitgestellt werden.

Zur Begründung der Integrationstheorie wollen wir drei Schritte beschreiben:

1. Welche Mengen der jeweiligen Grundmenge sollen überhaupt zu einer „Messung" zugelassen werden? Das sind die messbaren Teilmengen, vgl. $\S\,42$ *Messräume*.

2. Was bedeutet „Messung"? Das ist die Festlegung eines Maßes, vgl. $\S\,43$ *Maße*. In diesen Problembereich gehört insbesondere die Konstruktion des Lebesguemaßes, die in $\S\,44$ durchgeführt wird.

3. Und was ist dann Integration unter Vorgabe eines Maßes? Das Integral einer Funktion wird definiert als der Grenzwert von Integralen über einfache Funktionen, die die vorgegebene Funktion geeignet approximieren, vgl. Kapitel XIII.

Vor der Beschäftigung mit der Integration stellen wir in $\S\,44$ noch eine wichtige Konstruktion von Maßen dar, die wir vor allem für die Beschreibung des Lebesguemaßes benötigen.

Dieses Kapitel richtet sich weitgehend nach dem Lehrbuch von Th. Bröcker, Analysis II, mit gelegentlichen Ergänzungen aus Amann/Escher, Analysis III.

Ein Klassiker zur Maßtheorie ist P. Halmos, Measure Theory, Springer-Verlag, 1974 (Neuauflage).

§42 Messräume

(42.1) Definition: (Messraum) Ein *Messraum* (auch *messbarer Raum*) $(X, \mathcal{A})$ ist eine nichtleere Menge X zusammen mit einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf X. Dabei ist eine *σ-Algebra* ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X, also $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, mit den folgenden Eigenschaften:

σ1 $\emptyset \in \mathcal{A}$.

σ2 Für alle $M \in \mathcal{A}$ gilt $X \setminus M \in \mathcal{A}$.

σ3 Für alle $M_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, gilt $\bigcup M_k \in \mathcal{A}$.

Die Teilmengen $M \subset X$, $M \in \mathcal{A}$, sind die *messbaren Mengen*.

(42.2) Bemerkungen:

1° $X \in \mathcal{A}$.

2° Abzählbare Durchschnitte messbarer Mengen sind messbar.

3° Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *messbar* (in Bezug auf σ-Algebren $\mathcal{A}$ auf X und $\mathcal{B}$ auf Y), wenn für alle $B \in \mathcal{B}$ stets $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

4° Kompositionen messbarer Abbildungen sind messbar und die Identität $\mathrm{id} : X \to X$, $x \mapsto x$, ist messbar. Die messbaren Räume mit den messbaren Abbildungen als Morphismen bilden daher eine Kategorie.

(42.3) Beispiele:

1° $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$, die *triviale* σ-Algebra.

2° $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, die *größte* σ-Algebra.

3° Zu einem Messraum $(X, \mathcal{A})$ und einer Abbildung $f : X \to Y$ in eine nichtleere Menge Y ist $f_*\mathcal{A} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra auf Y, das *direkte Bild von $\mathcal{A}$ unter f*. f ist messbare Abbildung in Bezug auf $\mathcal{A}$ und $f_*\mathcal{A}$.

4° Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen messbaren Räumen $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ ist genau dann messbar, wenn $\mathcal{B} \subset f_*\mathcal{A}$.

(42.4) Satz - Definition: (Erzeuger, Erzeugendensystem) Zu jedem System $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X gibt es die (eindeutig bestimmte) kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathcal{S})$, die $\mathcal{S}$ enthält. Es gilt

1. $\mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S})$ und $\sigma(\mathcal{S})$ ist eine σ-Algebra.
2. Für jede weitere σ-Algebra $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ gilt $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$.

$\sigma(\mathcal{S})$ ist das *Erzeugnis* von $\mathcal{S}$ oder die von $\mathcal{S}$ erzeugte σ-Algebra. Ein *Erzeugendensystem* einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist ein Teilsystem $\mathcal{S}$ mit $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S})$.

(42.5) Lemma: *Sei $(\mathcal{A}_\imath)_{\imath \in I}$ eine Familie von σ-Algebren auf X. Dann ist auch*

$$\mathcal{A} = \bigcap \{ \mathcal{A}_\imath : \imath \in I \}$$

eine σ-Algebra auf X.

Bemerkungen: 1. Es gilt

$$\sigma(\mathcal{S}) = \bigcap \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \text{ ist } \sigma-\text{Algebra und } \mathcal{S} \subset \mathcal{A}\} \ .$$

2. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Messräumen $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ ist genau dann messbar, wenn für ein Erzeugendensystem $\mathcal{S}$ von $\mathcal{B}$ gilt: Für alle $S \in \mathcal{S}$ ist $f^{-1}(S) \in \mathcal{A}$.

(42.6) Definition: (Borelalgebra) Sei X ein topologischer Raum mit der Topologie $\mathcal{T}$, dem System aller offenen Teilmengen von X, $X \neq \emptyset$. Dann heißt die σ-Algebra $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T})$ die (*zur Topologie gehörige*) *Borelalgebra* von X.

(42.7) Lemma: *Sei X topologischer Raum und $\mathcal{B}$ die zugehörige Borelalgebra.*

1° $\mathcal{B} = \sigma(\{A \subset X : A \text{ abgeschlossen}\})$.

2° *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ mit der induzierten Topologie. Dann gilt*

$$\mathcal{B} = \sigma\left(\,\{B(x,r) \cap X : x \in X\,,\ r \in \mathbb{Q}\}\,\right)\,,$$

wobei die offenen Kugeln bezüglich irgendeiner Norm auf $\mathbb{R}^n$ gebildet werden.

Man kommt sogar mit einer abzählbaren Menge von Kugeln aus, vgl. Übungen. Diese Aussage stimmt so auch noch für separable metrische Räume und allgemeiner für topologische Räume mit abzählbarer Basis. Sie stimmt aber nicht für allgemeine metrische Räume.

3° $X = \mathbb{R}$ *mit der üblichen Topologie. Dann*

$$\mathcal{B} = \sigma(\,\{]a,b] : a,b \in \mathbb{Q}\}\,) = \sigma(\,\{]r,\infty[\, : r \in \mathbb{Q}\}\,)\,.$$

4° *Sei $f : Y \to X$ Abbildung auf einem Messraum $(Y, \mathcal{A})$. Dann*

$$f \text{ messbar} \iff \forall\, U \subset X \text{ offen} : f^{-1}(U) \in \mathcal{A} \iff \forall\, B \subset X \text{ abgeschlossen} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\,.$$

Konvention: messbar $\equiv$ borelmessbar $\equiv$ messbar in Bezug auf die (jeweilige) Borelalgebra.

Wiederholung: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ mit den üblichen Rechenregeln und als topologischer Raum mit der Ordnungstopologie. 42.7.3° gilt analog.

Zufallsvariable. Eine messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ wird auch *Zufallsvariable* genannt. Notation: $\{f > a\} = \{f(x) > a\} = \{x \in X : f(x) > a\} = f^{-1}(y \in \overline{\mathbb{R}} : y > a)$.

(42.8) Satz: $(X, \mathcal{A})$ *sei Messraum.*

1° $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar* $\iff \forall\ a \in \mathbb{R} : \{f > a\}$ *messbar.*

2° $f : X \to \mathbb{R}^n$ *messbar* $\iff f = (f^1, \ldots, f^n)$ *und* $f^1, f^2, \ldots, f^n$ *messbar.*

3° *Die Summe von zwei $\mathbb{R}^n$-wertigen messbaren Abbildungen und die skalaren Vielfachen sind wieder messbar. $\mathcal{M}(X, \mathbb{R}^n) = \{f : X \to \mathbb{R}^n : f \text{ messbar}\}$ ist daher ein (in der Regel unendlichdimensionaler) $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

4° $f : X \to \mathbb{C}$ *messbar* $\implies |f|$ *messbar.*

5° $f, g : X \to \mathbb{C}$ *messbar* $\implies fg$ *messbar.*

Anders als für Folgen stetiger oder differenzierbarer Funktionen hat man für messbare Funktionen die folgenden bemerkenswerten Resultate:

(42.9) Satz: *Sei X Messraum mit der σ-Algebra $\mathcal{A}$.*

1° *Für jede Folge (f_j) messbarer Funktionen $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sind die Funktionen*

$$\sup f_j \ , \ \inf f_j \ , \ \limsup f_j = \overline{\lim} f_j \ , \ \liminf f_j = \underline{\lim} f_j$$

stets messbar.

2° *Für jede punktweise konvergente Folge (f_j) messbarer Funktionen $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist die Grenzfunktion $f(x) = \lim f_j(x)$, $x \in X$, messbar.*

3° *Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in X$. Dann gibt es eine aufsteigende Folge (φ_j) von Stufenfunktionen $\varphi_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ so dass*

$$f(x) = \lim_{j\to\infty} \varphi_j(x) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \varphi_j(x)$$

punktweise gilt. [23.11.07]

(42.10) Korollar: Eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann messbar, wenn es eine Folge (φ_j) von Stufenfunktionen $\varphi_j : X \to \mathbb{R}^n$ gibt mit $f = \lim \varphi_j$ punktweise.

Produkte von Messräumen:

(42.11) Definition: Es seien zwei Messräume $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ gegeben. Die von $\{A \times B : A \in \mathcal{A}\,,\ B \in \mathcal{B}\}$ erzeugte σ-Algebra auf $X \times Y$ definiert die Produktstruktur auf $X \times Y$ als Messraum. Sie wird mit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ bezeichnet.

(42.12) Satz: Die σ-Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ wird durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert.

1° Die Projektionen $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$, sind stets messbar.

2° Eine Abbildung $f : Z \to X \times Y$ ist bereits dann messbar, wenn die Kompositionen mit den beiden Projektionen messbar sind.

Eine σ-Algebra $\mathcal{C}$ auf dem Produkt $X \times Y$ erfüllt 1° genau dann, wenn $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ und $\mathcal{C}$ erfüllt 2° genau dann, wenn $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

(42.13) Satz: Im Fall $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ gilt für die Produktalgebra

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})\,.$$

Vgl. Übungen. Im allgemeinen hat man für topologische Räume X, Y nur

$$\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)\,.$$

§43 Maße

(43.1) Definition: Ein *Maß* auf einem Messraum $(X, \mathcal{A})$ ist eine Abbildung $\mu : X \to [0, \infty]$ mit den folgenden Eigenschaften:

μ1 $\mu(\emptyset) = 0$.

μ2 μ ist σ-*additiv*, das heißt für alle Folgen (M_k) auf $\mathcal{A}$, also $M_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, mit paarweise disjunkten Elementen, das heißt $M_k \cap M_j = \emptyset$ im Falle $k \neq j$, gilt

$$\mu\left(\bigcup M_k\right) = \sum \mu(M_k) .$$

Mit den üblichen Regeln für das Rechnen mit ∞, insbesondere als Grenzwert.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt dann *Maßraum.*

Ein Maß μ mit $\mu(X) = 1$ heißt auch *Wahrscheinlichkeitsmaß*.

(43.2) Beispiele:

1° $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ mit $\mu(X) = r \geq 0$ ist Maß.

2° $\mu(M) = 0$ für alle $M \in \mathcal{A}$ liefert Maß.

3° Für einen Messraum $(X, \mathcal{A})$ gibt es zu jedem Punkt $p \in X$ das *Dirac-Maß* δ_p definiert durch $\delta_p(M) = 1$, falls $p \in M$, und $\delta_p(M) = 0$ sonst.

4° Das Zählmaß ζ ist auf jedem Messraum $(X, \mathcal{A})$ definiert, für den die endlichen Mengen alle messbar sind. Es wird gesetzt: $\zeta(M)$ ist die Anzahl der Elemente von M, wenn M endlich ist, und $\zeta(M) = \infty$, wenn M nicht endlich ist.

(43.3) Entscheidende Fragestellung: (im Kontext der Integration im euklidischen $\mathbb{R}^n$) Gibt es auf der Borelalgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ein Maß μ, welches für die Quader des $\mathbb{R}^n$ mit dem elementargeometrischen euklidischen Inhalt der Quader übereinstimmt? Dabei sei der Inhalt eines Quaders $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ gerade das Produkt

$$\mathrm{Vol}_n(Q) = \mathrm{Vol}(Q) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)$$

der Seitenlängen. Die Forderung ist also $\mu(Q) = \mathrm{Vol}(Q)$.

Die Antwort lautet ja. Die Konstruktion, die wir im nächsten Paragraphen erklären, ist nicht trivial.

Zuvor stellen wir in diesem Paragraphen noch einige Standardeigenschaften von Maßen mit ausführlichen Beweisführungen bereit, nicht zuletzt auch, um den fundamentalen Begriff des Maßes einzuüben. Und wir behandeln die Nullmengen eines Maßraumes sowie die Vervollständigung von Maßräumen.

(43.4) Bemerkungen: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

1° Für $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ gilt

$$\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2) .$$

2° Für allgemeine $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(M_1 \cup M_2) + \mu(M_1 \cap M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2)\,.$$

3° Für $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ mit $M_1 \subset M_2$ gilt

$$\mu(M_1) \le \mu(M_2)\,.$$

4° Für Folgen (A_k), $A_k \in \mathcal{A}$, gilt

$$\mu(\bigcup A_k) \le \sum \mu(A_k)\,.$$

5° Für aufsteigende Folgen (A_k), $A_k \in \mathcal{A}$, also $A_k \subset A_{k+1}$, gilt

$$\mu(\bigcup A_k) = \sup \mu(A_k)\,.$$

(43.5) Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine messbare Teilmenge $N \subset X$ heißt dann μ-Nullmenge, oder einfach Nullmenge, wenn $\mu(N) = 0$.

Ein Maßraum heißt *vollständig*, wenn alle Teilmengen von Nullmengen messbar sind.

Für eine Teilmenge M einer Nullmenge N ist $\mu(M)$ eventuell nicht definiert, weil M nicht messbar sein muss. Das kann vorkommen, wenn der Maßraum nicht vollständig ist. Es wird sich zeigen, dass zum Beispiel das oben angesprochene (und noch nicht konstruierte) Maß auf den Borelschen Mengen des $\mathbb{R}^n$ nicht vollständig ist: Es gibt borelsche Nullmengen mit Teilmengen, die nicht borelmessbar sind (jedenfalls in der üblichen Mengenlehre mit Auswahlaxiom).

Ein nicht vollständiger Maßraum lässt sich aber in natürlicher Weise vervollständigen. Dazu betrachte man die Mengensysteme

$$\mathcal{N}_\mu := \{N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0\,\}\,,$$

$$\overline{\mathcal{N}_\mu} := \{M \subset X : M \subset N, N \in \mathcal{N}_\mu\}\,.$$

[27.11.07]

Vor der entsprechenden Konstruktion ein paar elementare Bemerkungen.

(43.6) Bemerkungen:

1° Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.

2° Jedes Maß auf der größten σ-Algebra $\mathcal{P}(X)$ ist vollständig. Also sind das Dirac-Maß und das Zählmaß vollständig (in Bezug auf $\mathcal{P}(X)$).

3° Der Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist genau dann vollständig, wenn $\overline{\mathcal{N}_\mu} \subset \mathcal{A}$.

Für die Vervollständigung setze man

$$\overline{\mathcal{A}}_\mu := \{A \cup M : A \in \mathcal{A}\,,\ M \in \overline{\mathcal{N}_\mu}\}\,,\ \overline{\mu}(A \cup M) := \mu(A)\,,\ A \cup M \in \overline{\mathcal{A}}_\mu\,.$$

Dadurch wird ein vollständiger Maßraum definiert, die *Vervollständigung* von $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

(43.7) Satz: *Mit den gerade eingeführten Bezeichnungen gilt:* $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ *ist eine* σ*-Algebra und* $\overline{\mu}$ *ist ein Maß. Ferner ist* $(X, \overline{\mathcal{A}}_\mu, \overline{\mu})$ *ein vollständiger Maßraum.*

Weiterhin gilt: Ist $(X, \mathcal{B}, \nu)$ *ein vollständiger Maßraum mit* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ *und* $\mu = \nu|_\mathcal{A}$*, so folgt* $\overline{\mathcal{A}}_\mu \subset \mathcal{B}$ *und* $\overline{\mu} = \nu|_{\overline{\mathcal{A}}_\mu}$*.*

§44 Konstruktion von Maßen

Gesucht: Ein Maß μ auf der σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ der Borelmengen mit $\mu(Q) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ für alle Quader $Q = \prod_{i=1}^n [b_i - a_i]$, $b_i \geq a_i$.

Beschränken wir uns zunächst auf den Fall $n = 1$: Wir studieren das System $\mathcal{S}$ der endlichen Vereinigungen von Intervallen in $\mathbb{R}$. Dabei sind alle Intervalle zugelassen, seien sie offen, halboffen, abgeschlossen, beschränkt oder unbeschränkt.

(44.1) Satz - Definition: Sei $\mathcal{S}$ das System der endlichen Intervalle.

1° Jedes $S \in \mathcal{S}$ ist Vereinigung von endlich vielen disjunkten Intervallen.

2° Für ein beschränktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, also $I = [a, b]$, $I =]a, b]$, $I = [a, b[$, oder $I =]a, b[$ mit $a \leq b$ setze man $\lambda(I) := b - a$.

3° Für die unbeschränkten Intervalle J setze man $\lambda(J) := \infty$.

4° Für eine disjunkte Vereinigung $S = \bigcup_{k=1}^m I_k$ setze man $\lambda(S) := \sum_{k=1}^m \lambda(I_k)$. Dann ist λ auf $\mathcal{S}$ wohldefiniert.

(44.2) Bemerkungen: Für $\mathcal{S}$ und λ aus 44.1 gilt:

1° $\mathcal{S}$ ist eine Mengenalgebra, d.h. für $S, T \in \mathcal{S}$ gilt: $S \cap T$, $X \setminus S$, $S \cup T \in \mathcal{S}$.

2° $\lambda(\emptyset) = 0$ und $\lambda(S \cup T) = \lambda(S) + \lambda(T)$, falls $S, T \in \mathcal{S}$ mit $S \cap T = \emptyset$.

3° $\lambda(\bigcup S_k) = \sum \lambda(S_k)$ für $S_k \in \mathcal{S}$, falls $\bigcup S_k \in \mathcal{S}$ gilt und die S_k paarweise disjunkt sind.

4° $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{S})$.

(44.3) Definition: (Prämaß) Sei $\mathcal{S}$ eine Mengenalgebra auf X , $X \neq \emptyset$. Ein *Prämaß* ist eine Funktion $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ mit

$\nu(\emptyset) = 0$.

Für alle disjunkten Folgen (S_k) aus $\mathcal{S}$, also $S_k \in \mathcal{S}$, $k \in \mathbb{N}$, $S_k \cap S_j = \emptyset$ falls $k \neq j$, für die noch $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k \in \mathcal{S}$ gilt, ist die Identität $\nu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(S_k)$ erfüllt.

Die Mengenfunktion λ aus 44.1 ist nach 44.1 und 44.2 ein Prämaß auf der Mengenalgebra $\mathcal{S}$. Ebenso die n-dimensionale Verallgemeinerung λ_n suf dem System der endlichen Vereinigungen von Quadern.

Ein Maß ist also ein Prämaß. Die Umkehrung gilt nicht, aber es gibt eine Erweiterung des Prämaßes zu einem Maß, wie in dem folgenden wichtigen Satz formuliert.

(44.4) Satz: (Fortsetzungssatz von Hahn) *Jedes Prämaß auf einer Mengenalgebra $\mathcal{S}$ hat eine Fortsetzung auf die σ-Algebra $\sigma(\mathcal{S})$ als ein Maß.*

Ansatz: Die Mengenfunktion $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$

$$\mu^*(M) := \inf\{\sum \nu(S_k) \,|\, M \subset \bigcup S_k \,,\; S_k \in \mathcal{S}\,\}$$

hat die Eigenschaften eines äußeren Maßes:

(44.5) Definition: (Äußeres Maß) Das ist eine Funktion $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ($X \neq \emptyset$) mit
$\alpha 1$ $\mu^*(\emptyset) = 0.$
$\alpha 2$ $\forall\ A, B \subset X \,,\ A \subset B \ :\ \mu^*(A) \le \mu^*(B)$, μ^* ist *monoton*.
$\alpha 3$ $\forall\ A_k \subset X \,,\ k \in \mathbb{N} \ :\ \mu^*(\bigcup A_k) \le \sum \mu^*(A_k)$, μ^* ist *σ-subadditiv*.

(44.6) Satz: (Lemma von Carathéodory) *Sei μ^* ein äußeres Maß. Dann ist*

$$\mathcal{A}(\mu^*) := \{A \subset X |\, \forall\ D \subset X : \mu^*(D) \ge \mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \cap (X \setminus A)\,)\,\}$$

eine σ-Algebra und $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}(\mu^*)}$ ist ein Maß. [30.11.07]

(44.7) Vorbemerkungen:

1° Für $M \subset X$ mit $\mu^*(M) = 0$ ist stets $M \in \mathcal{A}(\mu^*)$.

2° Für eine Teilmenge $A \subset X$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) $A \in \mathcal{A}(\mu^*)$.

ii) $\forall\, D \subset X \,,\ \mu^*(D) < \infty : \mu^*(D) \ge \mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \setminus A)$.

iii) $\forall\, D \subset X : \mu^*(D) = \mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \setminus A)$.

(44.8) Definition: Ein Prämaß ν auf einer Mengenalgebra $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt *σ-endlich*, wenn es eine Folge $(S_k)\,,\ S_k \in \mathcal{S}$, gibt mit $\nu(S_k) < 0$ und $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} S_k$.

Analog ist ein Maß μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ *σ-endlich*, wenn $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ für geeignete $A_k \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_k) < \infty$ gilt.

Offenbar ist das Prämaß $\lambda_1 = \lambda$ nach 44.1 und 44.2 σ-endlich, denn $\lambda_1([-k,k]) = 2k < \infty$ und $\mathbb{R} = \bigcup\, [-k,k]$. Ebenso ist die n-dimensionale Verallgemeinerung λ_n als Prämaß σ-endlich: $\lambda_n([-k,k]^n) = (2k)^n < \infty$.

(44.9) Satz: *Wenn das Prämaß ν ein σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{S}$ ist, so ist die Fortsetzung μ auf $\sigma(\mathcal{S})$ nach 44.4 eindeutig bestimmt. Ebenso ist die weitergehende Fortsetzung nach $\mathcal{A}(\nu^*)$ nach 44.6 eindeutig bestimmt.*

Folgerung: Das Lebesguemaß ist eindeutig bestimmt bei Vorgabe des euklidischen Volumenmaßes auf dem System aller Quader, siehe auch Paragraf 45.

(44.10) Lebesgue-Stieltjes-Maß: Für eine monoton wachsende und stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird durch

$$\mu_g^*(M) := \inf\left\{\sum \big(g(b_k) - g(a_k)\big) : M \subset \bigcup [a_k, b_k[\,\right\}\,,\ M \subset \mathbb{R}\,,$$

ein äußeres Maß festgelegt mit $\mu_g^*([a,b[) = g(b) - g(a)$. Das zugehörige Maß nach 44.4 und 44.6 heißt des *Lebesgue-Stieltjes-Maß zu* g. Im stetig differenzierbaren Fall ist $\mu_g^*(A) = \int_A g'(t)\,dt$ für Intervalle A, wobei das Integral das einfach Riemann-Integral ist bzw. das Integral für stetige Funktion nach MIA.

Der Begriff hat Verallgemeinerungen für nichtstetige g.

(44.11) Hausdorffmaß: X sei ein metrischer Raum mit dem System $\mathcal{T}$ der bezüglich der gegebenen Metrik offenen Teilmengen von X. Für $s > 0, \varepsilon > 0$, wird durch

$$h_\varepsilon^s(M) := \inf\left\{\sum_{j=0}^\infty \operatorname{diam}(U_j)^s : U_j \in \mathcal{T}\,,\ \operatorname{diam}(U_j) < \varepsilon\,,\ M \subset \bigcup_{j=0}^\infty U_j\right\}.$$

Dabei ist $\operatorname{diam}(U) = \sup\{d(x,y) : x, y \in U\}$.

Für $\varepsilon < \varepsilon'$ ist $h_{\varepsilon'}^s \le h_\varepsilon^s$. Setze:

$$h_*^s(M) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} h_\varepsilon^s(M)\,.$$

Dann ist auch h_*^s ein äußeres Maß, das s*-dimensionale äußere Hausdorffmaß*. Und das zugehörige Maß heißt das s*-dimensionale Hausdorffmaß*.

Ergänzend setzt man $h_*^0 = \zeta$, das Zählmaß.

Hausdorffdimension: Im Falle $X = \mathbb{R}^n$ mit einer von einer Norm erzeugten Metrik, z. B. mit der euklidischen Metrik, gelten die folgenden Eigenschaften für $A \subset \mathbb{R}^n$ und für $t > s$:

$h_*^s(A) < \infty \implies h_*^t(A) = 0\,.$

$h_*^t(A) > 0 \implies h_*^s(A) = \infty\,.$

Die *Hausdorffdimension* für $A \subset \mathbb{R}^n$ ist nun:

$$\dim_H(A) = \inf\{s > 0 : h_*^s(A) = 0\}\,.$$

Eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$ hat die Hausdorffdimension n, eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^n$ hat die Hausdorffdimension k.

Für den Rand ∂U einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ können als Hausdorffdimension alle Werte zwischen 0 und n auftreten, insbesondere auch $> n - 1$.

Es gibt Kurven im $\mathbb{R}^2$ (Bilder stetiger Abbildungen auf einem Intervall mit Werten in $\mathbb{R}^2$), die eine Hausdorffdimension $d \in \,]1,2]$ haben, man spricht dann auch von einer *fraktalen Dimension*.

§45 Das euklidische Lebesguemaß

Wir tragen die Ergebnisse des letzten Paragrafen für den Spezialfall des euklidischen Volumens im $\mathbb{R}^n$ zusammen und erhalten damit das Lebesguemaß mit einigen elementaren Eigenschaften. Außerdem behandeln wir in diesem Paragrafen einige weitere grundlegende Eigenschaften des Lebesguemaßes.

Auf dem Raum $X = \mathbb{R}^n$ haben wir das äußere Maß

$$\lambda_n^*(M) := \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(Q_k) : M \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k \, , \, Q_k \in \mathcal{Q} \right\} ,$$

wobei $\mathcal{Q}$ das System aller Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ und Vol_n das euklidische Standardvolumen ist. Zur Erinnerung: Ein Quader Q ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ der Form $Q = \prod_{j=1}^n I_j$ mit Intervallen $I_j \in \mathbb{R}$ mit den Intervallenden a_j, b_j, also $]a_j, b_j[\, \subset I_j \subset [a_j, b_j]$, und das euklidische Volumen von Q ist $\mathrm{Vol}_n(Q) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$. Das Lemma von Carathéodory 44.6 liefert dann eine σ-Algebra $\mathcal{A}(\lambda_n^*)$, auf der λ_n^* ein vollständiges Maß ist. Dieses Maß ist das Lebesguemaß, das wir im Folgenden mit λ oder mit λ_n bezeichnen, und die σ-Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{A}(\lambda_n^*)$ ist das System der lebesguemessbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ umfasst die Borelalgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, weil $\mathcal{Q}$ die Borelalgebra erzeugt.

Um das Lemma von Carathéodory erfolgreich anwenden zu können mit dem gerade beschriebenen Ergebnis, muss gezeigt werden, dass λ_n^* ein äußeres Maß ist – das ist vergleichsweise einfach – und dass $\lambda^*(Q) = \mathrm{Vol}_n(Q)$ für alle Quader in $\mathbb{R}^n$ ist. Diese zweite Aussage genau zu zeigen ist dagegen recht aufwändig.

Wir sind dabei im letzten Paragrafen ein wenig anders vorgegangen. Wir haben ein Prämaß λ_n auf der von $\mathcal{Q}$ erzeugten Mengenalgebra $\mathcal{S}$ definiert (auch in dieser Situation sind die Wohldefiniertheit von λ_n und die Prämaßeigenschaft im Detail nicht ganz einfach zu zeigen; in der Vorlesung und in den Präsenzaufgaben haben wir uns weitgehend auf den Fall $n = 1$ beschränkt) um dann den Satz 44.4 (Satz von Hahn) anzuwenden, der besagt, dass sich ein solches Prämaß immer auf die von $\mathcal{S}$ erzeugte σ-Algebra zu einem Maß fortsetzen lässt. Also erhalten wir wie zuvor ein Maß λ_n auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, das wir ebenfalls das Lebesguemaß oder gelegentlich auch das Borel-Lebesgue-Maß nennen.

Technisch weniger aufwändig ist es, wenn man das Prämaß auf der Mengenalgebra $\mathcal{S}_0$ der endlichen Vereinigungen von „halboffenen“ Quadern (der Form $Q = \prod [a_j, b_j[$) definiert, wie das in den Präsenzaufgaben behandelt wird.

Eine Analyse der Resultate 44.4 und 44.6 zeigt, dass in diesem Vorgehen (mit dem Zwischenschritt, das Prämaß zu definieren), das Maß sich von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ auf ganz $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen lässt, weil ja die Maße in den beiden Fällen auf der Borelalgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ übereinstimmen.

Weil das Maß, bzw. das Prämaß, σ-endlich ist, ist das Lebesguemaß λ (auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und auch auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$) nach Satz 44.9 eindeutig bestimmt.

Wir fassen zusammen.

(45.1) Satz:

1° $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ *ist ein* σ*-endlicher, vollständiger Maßraum.*

2° $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

3° $\lambda_n(Q) = \mathrm{Vol}_n(Q)$ *für Quader* $Q \subset \mathbb{R}^n$*.*

4° *Für kompakte Teilmengen* $K \subset \mathbb{R}^n$ *ist* $\lambda(K) < \infty$*.*

5° *Eine Teilmenge* $N \subset \mathbb{R}^n$ *ist genau dann eine lebesguesche Nullmenge, d.h.* $N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *und* $\lambda(N) = 0$*, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine Folge* (Q_k) *von Quadern in* $\mathbb{R}^n$ *gibt mit* $N \subset \bigcup Q_k$ *und* $\sum \mathrm{Vol}_n(Q_k) < \varepsilon$*.* (So wurden die Nullmengen in der Definition 28.11 in Kapitel IX.B eingeführt.) [7.12.07]

(45.2) Beispiele:

1° Abzählbare Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind stets (lebesguesche) Nullmengen.

Wenn wir von Nullmengen sprechen, sind in der Regel lebesguesche Nullmengen gemeint.

2° $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ ist eine Nullmenge als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

3° k-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ sind im Falle $k < n$ Nullmengen.

(45.3) Satz: *Das Lebesguemaß* λ *ist translationsinvariant: Es gilt für lebesguemessbare Mengen* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *und für Translationsvektoren* $b \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda(A) = \lambda(A + b)\,.$$

Außerdem gilt $\lambda(cA) = c^n \lambda(A)$ *für* $c \in \mathbb{R}$*.*

In Verallgemeinerung von 45.3 erweist sich das Lebesguemaß sogar als invariant gegenüber allen euklidischen Bewegungen, d.h. für $D + b\,,\ D \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})\,,\ b \in \mathbb{R}^n$, gilt für alle $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$:

$$\lambda(A) = \lambda(D(A) + b)\,.$$

In Umkehrung des letzten Satzes 45.3 gilt:

(45.4) Satz: *Sei* μ *ein* σ*-endliches Maß* $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$*, das im folgendem Sinne translationsinvariant ist:* $\mu(A) = \mu(A + b)$ *für alle* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *und für alle* $b \in \mathbb{R}^n$*. Dann ist* μ *ein skalares Vielfaches von* λ *: Es gibt* $c \in \mathbb{R}$ *mit* $\lambda = c\mu$*.*

Auf die Bedingung „σ-endlich“ kann nicht verzichtet werden, wie man an dem Beispiel des Zählmaßes sieht. Das Zählmaß ζ auf $\mathbb{R}^n$ ist offensichtlich translationsinvariant und es ist $\lambda \neq c\zeta$ für alle Konstanen $c \in \mathbb{R}$. Das Zählmaß ist auf $X = \mathbb{R}^n$ nicht σ-endlich.

Auf $\mathbb{Q}$ ist das Zählmaß σ-endlich. Die Restriktion von λ auf $\mathbb{Q}$ ist 0.

Abschließend noch ein paar gute und nützliche Eigenschaften:

(45.5) Satz:

1° $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) : U \in \mathcal{T}\ ,\ A \subset U\}$ für $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

2° $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt }, K \subset A\}$ *für* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Maße mit 1° und 2° heißen *reguläre Maße*.

3° λ *ist* lokal endlich*, d.h. zu jedem Punkt* $x \in \mathbb{R}^n$ *gibt es eine offene Umgebung* $V \subset \mathbb{R}^n$ *mit* $\lambda(V) < \infty$*.*

4° *Jede lebesguemessbare Teilmenge* $A \subset \mathbb{R}^n$ *ist von der Form* $A = N \cup \bigcup K_j$ *mit einer Nullmenge* N *und einer Folge* (K_j) *von kompakten Mengen.*

5° $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *ist die Vervollständigung von* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *in Bezug auf* λ*:* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}_\lambda$ *(vgl. Satz 43.7).*